@mojinejad

ریاضی مهندسی

Subject: ۹۸/۷/۷

Date:

(*) انتگرال گیری و تفکیک جز به جز رو مسلط باشیم.

۱- سری فوریه و انتگرال فوریه

۲- معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

۳- توابع مختلط

سری فوریه:

تابع متناوب: برای تابع دلخواه $f(x)$، اگر عدد مثبت T چنان باشد که به ازای هر $\forall x \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $f(x+T)=f(x)$ آنگاه f را تابع متناوب و T را دوره‌ی تناوب تابع f نامیم.

کوچکترین مقدار عدد مثبت p که $f(x+p)=f(x)$ را دوره تناوب اصلی نامیم.

به طور مثال توابع $f(x) = \sin x$ و $\cos x$

دوره تناوب اصلی آن $p = 2\pi$ است.

$\tan x$ و $\cot g\, x \to p = \pi$

مثال از توابع ←

$\sin(ax) \to p = \dfrac{2\pi}{|a|}$

$\cos(ax) \nearrow$

$\tan(ax)$ یا $\cot g(ax) \Rightarrow p = \dfrac{\pi}{|a|}$

مثال: $\sin(6x) \to p = \dfrac{2\pi}{|6|} = \dfrac{\pi}{3}$

* اگر دوره تناوب به صورت $[d, d+p]$ را یک بازه تناوب p نامیم (اختیارا باز گذاشتیم برای بدست آوردن p)

تعریف سری فوریه:

فرض کنید تابع $f(x)$ دارای دوره تناوب p باشد، در این صورت سری فوریه تابع تناوبی (نوسانی) f به صورت زیر نوشته می‌شود:

PAPCO STATIONERY

Scanned by CamScanner

Subject.

Date.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi n t}{p} + b_n \sin\frac{2\pi n t}{p}$$

که در آن a_0 و a_n و b_n ها را ضرایب فوریه نامیم.

تذکر: برابری فوق ممکن است برای همه ی نقاط در دامنه ی تابع همگرای سری سمت راست معتبر نباشد اما می توان گفت برابری فوق برای R (اعداد حقیقی به جز مجموعه ای با اندازه صفر) معتبر است.

⊛ مجموعه متناهی و شمارا اندازه آن ها صفر است.

⊛ اعداد گویا شمارا است، اعداد حقیقی شمارا نیستند.

• حال می خواهیم ضرایب سری فوریه را بدست آوریم برای این منظور انتگرال های زیر را نیاز داریم. اگر $m, n \in \mathbb{N}$ (اعداد طبیعی)

1) $\displaystyle\int_d^{d+p} \sin\frac{2n\pi t}{p}\, dt = 0$

2) $\displaystyle\int_d^{d+p} \cos\frac{2n\pi t}{p}\, dt = 0$ (تغییر عدد)

3) $\displaystyle\int_d^{d+p} \sin\frac{2n\pi t}{p} \cdot \sin\frac{2m\pi t}{p}\, dt = 0$

$m \neq n$

PAPCO STATIONERY

Scanned by CamScanner

Subject.

Date.

4) $$\int_{d}^{d+P} \cos \frac{2n\pi}{P} t \cdot \cos \frac{2m\pi}{P} t \, dt = 0$$

$m \neq N$

5) $$\int_{d}^{d+P} \sin \frac{2n\pi}{P} t \cdot \cos \frac{2m\pi}{P} t \, dt = 0$$

$\forall m, n \in W$

6) $$\int_{d}^{d+P} \sin^2 \frac{2n\pi}{P} t = \frac{P}{2}$$

7) $$\int_{d}^{d+P} \cos^2 \frac{2n\pi}{P} t \, dt = \frac{P}{2}$$

مثال:

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

PAPCO STATIONERY

Scanned by CamScanner

Subject.

Date.

$$\int \sin ax . \cos bx \, dx = \left(-\frac{1}{a+b} \cos(a+b)x - \frac{1}{a-b} \cos(a-b)x\right) + c$$

$\sin(a+b)x + \sin(a-b)x$

$$\int \sin ax . \sin bx \, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a-b} \sin(a-b)x - \frac{1}{a+b} \sin(a+b)x\right) + c$$

$\frac{1}{2}(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x$

$$\int \cos ax . \cos bx \, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+b} \sin(a+b)x + \frac{1}{a-b} \sin(a-b)x\right) + c$$

$\frac{1}{2} \cos(a+b)x + \cos(a-b)x$

طبق روابط مثلثاتی ↑

- $\sin a . \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$
- $\cos a . \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$
- $\sin a . \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

انتگرال جزء به جزء

مثال:

$$\int \underset{u}{x} \underset{dv}{\sin x} \, dx = -x\cos x - \int -\cos x \, dx = -x\cos x + \sin x + c$$

$-\sin x$

$du = 1\,dx = dx$

PAPCO STATIONERY

$v = \int \sin x \, dx = -\cos x$

Subject.

Date. ۹۸/۱۰/۱۴

سری فوریه

تابع متناوب، p دوره تناوب

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2n\pi t}{p} + b_n \sin\frac{2n\pi t}{p}$$

سری فوق را سری فوریه می‌نامیم و ضرایب a_0 و a_n و b_n را ضرایب فوریه

تابع f می‌نامیم و به صورت زیر :

توسط بازه $[d, d+p]$

تذکر

در نقاط ماکسیمم که تابع $f(t)$ مقدار آن با سری سمت راست برابر نباشد

یا متناهی است و یا اینکه دارای طول ضعیف می‌باشد که قابل چشم‌پوشی

است.

ضرایب فوریه به کمک انتگرال‌های زیر محاسبه می‌شود:

$$a_0 = \frac{2}{p}\int_d^{d+p} f(t)\,dt$$

$$b_0 = \frac{2}{p}\int_d^{d+p} f(t)\cos\frac{2n\pi t}{p}\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{p}\int_d^{d+p} f(t)\sin\frac{2n\pi t}{p}\,dt$$

PAPCO STATIONERY

Scanned by CamScanner

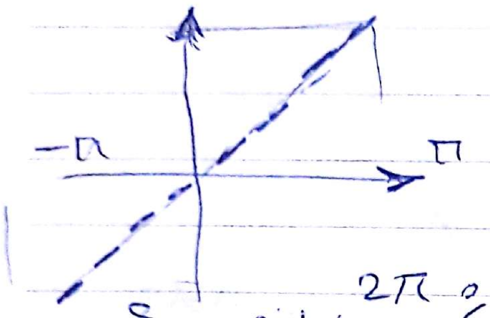
Subject: مثال: سری فوریه تابع $f(t)=t$ در فاصله $[-\pi, \pi]$ را

Date.

$-\pi < t < \pi$

$p = 2\pi$ می باشد:

بازه تناوب



در بازه 2π به اینصورت می شود

$$a_0 = \frac{2}{p}\int_d^{d+p} f(t)\,dt = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\,dt =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}t^2\right)_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2}\right) = 0$$

$$a_n = \frac{2}{p}\int_d^{d+p} f(t)\cos\frac{2n\pi t}{p}\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi} \underbrace{t}_{u}\,\underbrace{\cos nt\,dt}_{dv}$$

$$u = t \rightarrow du = dt$$

$$dv = \cos nt\,dt \rightarrow v = \int \cos nt\,dt = \frac{1}{n}\sin nt$$

PAPCO STATIONERY

Scanned by CamScanner

Subject. $\int u\,dx = uv - \int v\,du$

Date.

$dv = \ldots \to v$

$u = du$

$= \left(t \times \frac{1}{n}\sin nt\right)_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{n}\sin nt\,dt$

$= \frac{\pi}{n}\sin(n\pi) - \left(-\pi \times \frac{1}{n}\sin(-n\pi)\right) - \frac{1}{n} \times$ (0, 0, 0)

$\left(-\frac{1}{n}\cos nt\right)_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{n^2}\left(\cos n\pi - \cos(-n\pi)\right)$

$\cos n\pi$ $= 0$]

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi} f \cdot \sin \frac{2n\pi t}{2\pi}\,dt =$

$\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} t \cdot \sin(nt)\,dt$

$t = dt$

$u = t \to du = dt$

$= \frac{1}{n}\left(t \times \left(-\frac{1}{n}\cos nt\right)\right) -$

$dv = \sin nt\,dt$

$\int_{-\pi}^{\pi} -\frac{1}{n}\cos(nt)\,dt$

$-\frac{1}{n}\cos(nT)$

PAPCO STATIONERY

Scanned by CamScanner

Subject.

Date.

$$\frac{1}{\pi}\left(\pi \times \frac{-1}{n}\cos n\pi - \left(-\pi \times \frac{-1}{n}\cos(-n\pi)\right)\right.$$

$$+\left(\frac{1}{n}\times\frac{1}{n}\sin(nt)\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

در اینجا منفی شد

$\cos(n\pi)$ یک هستند یا مثبت یا منفی

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}(-1)^n - \frac{\pi}{n}(-1)^n\right) + \left(\frac{1}{n^2}\sin(n\pi) - \frac{1}{n^2}\sin(-n\pi)\right) = \frac{1}{\pi}\times -\frac{2\pi}{n}(-1)^n = \frac{-2(-1)^n}{n}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2n\pi t}{P} + b_n \sin\frac{2n\pi t}{P}$$

$P = 2\pi$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)(-1)^n}{n}\sin(nt)$$

↑ سری فوریه تابع به صورت

Scanned by CamScanner

Subject. مثال: سری فوریه تابع
Date.

$$f(t)=\begin{cases} t & -\frac{\pi}{2}\le t\le \frac{\pi}{2} \\ \pi-t & \frac{\pi}{2}<t<\frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

که $p=2\pi$ می باشد

$$a_0=\frac{2}{\underset{2\pi}{P}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(t)\,dt$$

• باید فاصله شکسته شود.

$$=\frac{2}{2\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t\,dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(\pi-t)\,dt\right)=$$

کران بالا

$$\frac{1}{\pi}\left(\left(\frac{1}{2}t^2\right)_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\left(\pi t-\frac{1}{2}t^2\right)_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\right)$$

کران پایین

$$=\frac{1}{\pi}\left(\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi^2}{4}-\frac{1}{2}\times\frac{\pi^2}{4}\right)+\left(\left(\pi\times\frac{3\pi}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2\right)-\left(\pi\times\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\times\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right)\right)\right)$$

$\frac{9\pi^2}{4}$

$$-\frac{1}{\pi}\left(\frac{3\pi^2}{2}-\frac{9\pi^2}{8}-\frac{\pi^2}{2}+\frac{\pi^2}{8}\right)=0$$

$\pi^2-\frac{8}{8}\pi^2$

PAPCO STATIONERY

Scanned by CamScanner

$$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(t)\cos\frac{2n\pi t}{2\pi}\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t\cdot\cos\frac{2n\pi t}{2\pi} \rightarrow \frac{1}{n}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{t}_{u}\,\underbrace{\cos(nt)}_{dv} +$$

ساده می‌شود

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (\pi - t)\cos nt\,dt =$$

محاسبه شود

جز به جز

$$\frac{1}{n}\left(\left(t\times\frac{1}{n}\sin nt\right)_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{n}\sin nt\,dt\right) +$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\left((\pi - \not{t})\times\frac{1}{n}\sin nt\right)_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{n}\sin nt \times(-dt)\right)$$

انتگرال

محاسبه دوم انتگرال جز به جز دومی

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\times\frac{1}{n}\sin\left(-\frac{n\pi}{2}\right)\right) -$$

$$\frac{1}{n}\times\left(-\frac{1}{n}\cos nt\right)_{-\pi/2}^{\pi/2}\Big) +$$

Subject.

Date.

$$\frac{1}{\pi}\left(\left(\left(\pi-\frac{3\pi}{2}\right)\times\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n3\pi}{2}\right)-\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)\times\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\right)+\frac{1}{n}\times\left(-\frac{1}{n}\cos nt\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}\right)$$

$$\left(\pi-\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2} \qquad \left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(0+\frac{1}{n^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-\cos\left(-\frac{n\pi}{2}\right)\right)\right)$$

$$+\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{n}\sin\frac{3n\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{n}\times\sin\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\times\frac{\pi}{2n}\left(\sin\frac{3n\pi}{2}-\sin\frac{n\pi}{2}\right)=\begin{cases}0 & n \text{ زوج}\\ \frac{1}{2n}\left(-(-1)^n-(-1)^n\right) & n \text{ فرد}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & n \text{ زوج}\\ \frac{-2\times(-1)^n}{2n} & n \text{ فرد}\end{cases}$$

$b_n=?$

حل کنید

مثال: سری فوریه تابع $f(t)=t^2$ برای $-1\leq t<1$

و $p=2$ بسط دهید.

PAPCO STATIONERY

Scanned by CamScanner

Subject: تعریف تابع زوج و فرد : تابع $f(x)$ را زوج گوییم هرگاه و فقط اگر
Date:

$$\begin{cases} 1)\ x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f \\ 2)\ f(-x) = f(x) \end{cases}$$

زوج

$$\begin{cases} 1)\ x \in D_f \rightarrow -x \in D_f \\ 2)\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

f فرد است اگر

$D_f = R$

مثال: $f(x) = x^3$ $D_f = R$

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -x^3 = f(x)$$

f فرد

ب) $g(x) = x^4 + 2x^2 + 1$

$$g(-x) = (-x)^4 + 2(-x)^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 = g(x)$$

زوج

مثال:

$f(x) = -5x^5$ فرد

$h(x) = x - x^3$

$g(x) = x^6 + 1$

PAPCO STATIONERY

Scanned by CamScanner

Subject ۹۸،۷،۲۱
Date

تذکر:

$\left[-\frac{P}{2}, \frac{P}{2}\right]$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2n\pi t}{P} + b_n \sin \frac{2n\pi t}{P}$$

$$a_n = \frac{2}{P} \int_{-P/2}^{P/2} f(t) \sin \frac{2n\pi t}{P} \, dt$$

Scanned by CamScanner

Subject:

Date:

اگر f، تابع زوج باشد در این صورت

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{a} f(t)\,dt$$

همچنین اگر f تابع فرد باشد:

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$$

تذکر:

در سری فوریه تابع f(t) با دوره تناوب p، اگر

الف: f تابع فرد باشد در اینصورت:

$a_n = 0$

تمام ضرایب a_n، $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ صفر می‌شود (در سری فوریه) و

$$b_n = \frac{4}{p}\int_{0}^{\frac{p}{2}} f(t)\sin\frac{2n\pi t}{p}\,dt$$

ب: اگر f زوج باشد:

$$a_n = \frac{4}{p}\int_{0}^{-\frac{p}{2}} f(t)\sin\frac{2n\pi t}{p}\,dt$$

$n \in \mathbb{N}^*$

$b_n = 0$

$n \cup \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$

$(n \in \mathbb{N})$

PAPCO STATIONERY

Scanned by CamScanner

Subject $P=4$ برای $f(t)=4-t^2$ سری فوریه تابع **مثال:**

Date.

بیابید ، سپس مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ را بیابید :

تابع $f(t)$ زوج است پس $b_n=0$ ، لذا

$$a_n=\frac{4}{P}\int_0^{\frac{P}{2}} f(t)\cos\frac{2n\pi t}{P_4}\,dt=$$

$$\int_0^2 (4-t)^2 \cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right)dt$$

$u = 4-t^2 \rightarrow du=-2t\,dt$

$dv = \cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right) \rightarrow v=\int\cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right)dt=$

$$=(4-t^2)*\left(\frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}t\right)\right)\Big|_0^2 \quad \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}t\right)$$

ادامه

$$\Big|_0^2 + \frac{4}{n\pi}\int_0^2 t\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{2}t\right)dt$$

$u=t \rightarrow du=dt$

$dv=\sin\left(\frac{n\pi}{2}t\right) \rightarrow v=\frac{-2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right)$

$$=(0-0)+\frac{4}{n\pi}\left((t)\times\left(\frac{-2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right)\right)\Big|_0^2+\frac{2}{n\pi}\int_0^2\cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right)dt\right)$$

PAPCO STATIONERY

Scanned by CamScanner

Subject:

Date:

$$= \frac{4}{n\pi}\left(\left(2\times\frac{-2}{n\pi}\cos(n\pi)-0\right)+\left(\frac{2}{n\pi}\times\frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)\right)$$

$0 - 0$

$$= \frac{-16}{n^2\pi^2}\cos n\pi = \frac{-16(-1)^n}{n^2\pi^2}$$

$(\cos n\pi = (-1)^n)$

از طرفی

$$a_0 = \frac{4}{p}\int_0^{p/2} f(t)\,dt = \int_0^2 (4-t^2)\,dt =$$

$$4t - \frac{1}{3}t^3 \Big|_0^2 = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

پس سری فوریه تابع $f(t)$ به صورت:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2n\pi t}{p} + b_n \sin\frac{2n\pi t}{p}$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{16/3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-16(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi t}{2} =$$

$$\frac{8}{3} + \sum \frac{16(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi t}{2}$$

Scanned by CamScanner

Subject.
Date.

قسمت دوم سوال ۳

$$f(t) = 4 - t^2 = \frac{8}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi t}{2}$$

$t = 0$

$$\Longrightarrow 4 = \frac{8}{3} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \Longrightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{16}\left(4 - \frac{8}{3}\right) \quad \left(\frac{4}{3}\right)$$

$$= \frac{\pi^2}{12}$$

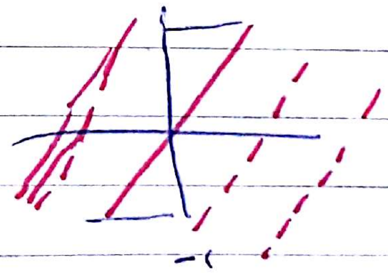
مثال: سری فوریه تابع $f(t) = t \; (-1 \leq t \leq 1)$

$p = 2$

f فرد است بنابراین $a_n = 0$ برای $n \in N^*$، b_n ها را بدست آورید:

$a_n = 0 \quad (n \in N^*)$ زوج $f(t)$: فرد

نمودار به صورت



$$= b_n = \frac{4}{p} \int_0^p f(t) \sin \frac{2n\pi t}{p} \, dt =$$

$$2\int_0^1 t \cdot \sin n\pi t \, dt$$

$u = t \Rightarrow du = dt$

$v \to \int \sin(n\pi t)\, dt = \frac{1}{n\pi} \cos n\pi t$

PAPCO STATIONERY

Subject

Date.

$$= 2\left((t) * \left(\frac{-1}{n\pi} \cos n\pi t\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{n\pi} \cos n\pi t \, dt \right)$$

$$= 2\left(\left(\frac{-1}{n\pi} \cos n\pi - 0\right) + \left(\frac{1}{n\pi} \times \frac{1}{n\pi} \sin n\pi t\right)\Big|_0^1 \right)$$

$$= 2\left(\frac{-1 \times (-1)^n}{n\pi} + \frac{1}{n^2\pi^2}(0 - 0) \right)$$

$$b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \Rightarrow f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin(n\pi t)$$

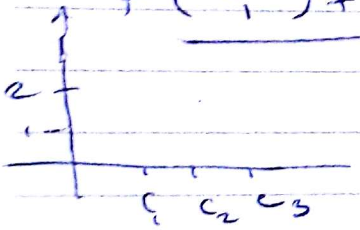
Scanned by CamScanner

قضیه دیریکله :

اگر تابع f در بازه $[d, d+p)$ در تعداد متناهی نقطه ناپیوسته باشد در این صورت و تعداد نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی روی این فاصله متناهی باشد در این صورت سری فوریه تابع f ، موجود است و در نقاطی که تابع پیوسته است این سری به مقدار تابع در آن نقطه (یعنی $f(x)$) و در نقاطی که تابع ناپیوسته است (مانند شکل c_1, c_2, c_3) به میانگین حد چپ و راست در آن نقاط (یعنی

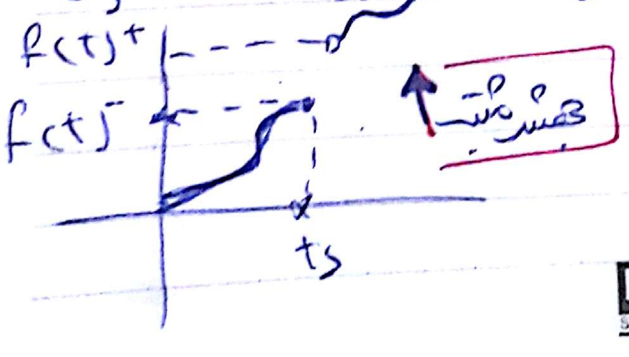
$$\frac{f(c_1^+)+f(c_1^-)}{2} = \frac{l_1+l_2}{2}$$

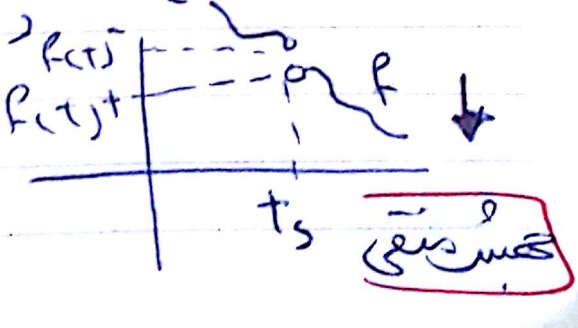
همگراست.



تعریف : فرض کنید تابع $f(x)$ در نقطه $t_s \in [d, d+p)$ ناپیوسته باشد در این صورت جهش تابع f، در نقطه t_s را با J_s نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$J_s = f(t_s^+) - f(t_s^-) = \text{جهش تابع } f(t) \text{ در نقطه } t_s$$





• در رابطه توابع f' و f'' پرش‌ها را با J_s ، J'_s و ... محاسبه می‌کنیم:

$$J'_s = f'(t_s^+) - f'(t_s^-)$$

$$J''_s = f''(t_s^+) - f''(t_s^-)$$

تذکر: وقتی تابع پیوسته باشد در نقطه $t(s)$ پیوسته باشد در این صورت $f(x)$

$$\boxed{J_s = 0}$$

قضیه: اگر تابع متناوب f در شرایط قضیه دیریکله صدق کند و t_1 و t_2 ... t_n نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)$ روی بازه $[d, d+p]$ باشد و J_1 و J_2 ... J_m جهش‌های $f(x)$ در این نقاط باشند آنگاه اگر $t_1 = d$ باید $t_n \neq d+p$ (یعنی هم ابتدا و انتها نمی‌تواند ناپیوسته باشد فقط یکی می‌تواند) در این صورت ضرایب فوریه a_n و b_n را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$a_n = \frac{-p}{2n\pi} b'_n - \frac{1}{n\pi} \sum_{k=1}^{m} J_k \cdot \sin \frac{2n\pi t_k}{p}$$

$$b_n = \frac{p}{2n\pi} a'_n + \frac{1}{n\pi} \sum_{k=1}^{m} J_k \cdot \cos \frac{2n\pi t_k}{p}$$

PAPCO STATIONERY

Scanned by CamScanner

* a'_n و b'_n ضرایب فوریه تابع $f'(x)$ می باشند به همین ترتیب

a'_n و b'_n برحسب a''_n ، b''_n بدست می آیند.

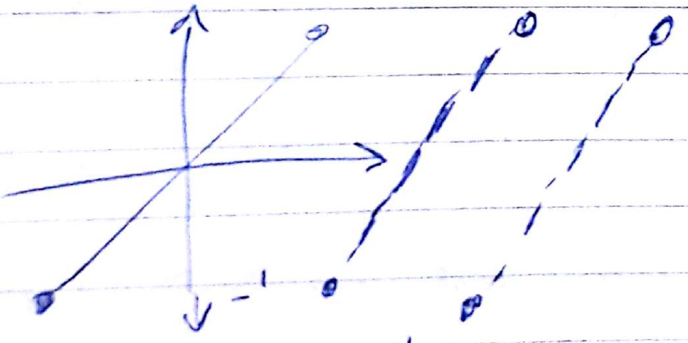
$$a'_n = -\frac{p}{2n\pi} b''_n - \frac{1}{n\pi}\sum_{k=1}^{m} J'_k \sin\left(\frac{2n\pi t_k}{p}\right)$$

$$b'_n = \frac{p}{2n\pi} a''_n + \frac{1}{n\pi}\sum_{k=1}^{m} J'_k \cos\left(\frac{2n\pi t_k}{p}\right)$$

۹۸,۷,۲۸

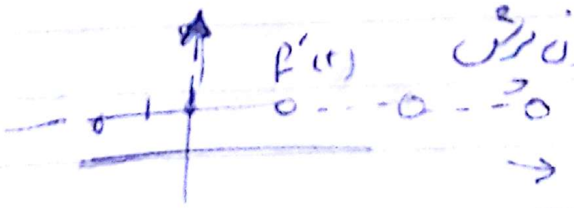
مثال: سری فوریه تابع زیر را به روش جهشی بدست آورید.

$f(t)=t \qquad -1 \le t < 1 \quad , \quad p=2$



$f(t)=t$ → نقطه ناپیوستگی $t=-1$, $J = -1-1=-2$

$f'(t)=1$



f' جهش ندارد
پس ناپیوستگی ندارد

PAPCO STATIONERY

Scanned by CamScanner

④ اگر تابع جهش نداشته باشد J ها صفر می شود

Subject.

Date.

$f''(t)=0 \rightarrow a''_n = b''_n = 0$ بنابراین

همه ضرایب صفر است.

$a_n = \frac{-P^2}{2n\pi} b'_n - \frac{1}{n\pi} \sum_k J_k \sin \frac{2n\pi t_k}{P}$

$J_1 \sin \frac{2n\pi(-1)}{2}$

$= -\frac{1}{n\pi}\left(\frac{P}{2n\pi} a''_n + \frac{1}{n\pi} \sum J'_k \cos \frac{2n\pi t_k}{P}\right) - 0$

$\frac{1}{n\pi} \times (-2) \sin(-n\pi) = 0$

تابع فرد است پس $a_n = 0$

$b_n = \frac{P^2}{2n\pi} a'_n + \frac{1}{n\pi} \times (-2) \times \cos \frac{2n\pi(-1)}{2}$

$= \frac{1}{n\pi}\left(\frac{-1}{n\pi} b''_n - \frac{1}{n\pi} J'_k \sin(n\pi t_k)\right) - \frac{2}{n\pi}\cos(n\pi)$

f' ناپیوستگی ندارد

$(-1)^n$

$= 0 - \frac{2}{n\pi} \times (-1)^n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}$

خاطره

Subject.

Date.

بنابراین سری فوریه تابع $f(t)$ به صورت :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi t}{P} + b_n \sin \frac{2n\pi t}{P} \right)$$

$$\Rightarrow f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin(n\pi t)$$

مثال :

$$f(t) = \begin{cases} 1+t^2 & 0 \leq t \leq 1 \\ 3-t & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

* تابع در نقطه یک پیوسته است.

تابع فوق ناپیوستگی ندارد پس جهش ندارد پس J_k ها صفر است.

$$f'(t) \begin{cases} 2t & 0 \leq t < 1 \\ -1 & 1 < t < 2 \end{cases}$$

تابع $f'(t)$ دارای دو جهش است زیرا :

$f'_+(1) = -1$, $f'_-(1) = 2$ $\Rightarrow$ $t_1 = 1$, $J_1 = -3$

$f'_+(0) = 0$, $f'_-(0) = -1$ $\Rightarrow$ $t_2 = 0$, $J_2 = 0 - (-1) = 1$

همچنین $f''(t)$ نیز :

PAPCO STATIONERY

Scanned by CamScanner

Date.

~~$f'''(t) = 0 \rightarrow a_n''' = b_n$~~

$f''(t) = \begin{cases} 2 & 0 \le t < 1 \\ 0 & 1 < t < 2 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} t_1 = 1 \rightarrow J_1' = 0 - 2 = -2 \\ t_2 = 0 \rightarrow J_2' = 2 - 0 = 2 \end{cases}$

$a_n''' = b_n''' = 0$ چون $f_{(n)}'''(t) = 0$ صفر

$a_n = -\frac{p^2}{2n\pi} b_n' - \frac{1}{n\pi} \sum J_k \sin \frac{2n\pi t_k}{p}$ ناپیوستگی

$= \frac{-1}{n\pi}\left(\frac{1}{n\pi} a_n'' + \frac{1}{n\pi}\left(\sum_{k=1}^{2} J_k' \cos \frac{2n\pi t_k}{\frac{p}{2}}\right)\right)$

~~$(-3)\sin(n\pi) + (1)\sin(n\pi 0)$~~ = 0

~~$= \frac{-1}{n\pi}$~~ a_n'' $\quad (-3)\cos(n\pi) + (1)\cos(0)$, $\cos(n\pi) = (-1)^n$

$= -\frac{1}{n\pi}\left(\frac{1}{n\pi}\left(-\frac{1}{n\pi} b_n''' - \frac{1}{n\pi}\left(\sum_{k=1}^{2} J_k'' \sin \frac{2n\pi t_k}{\frac{p}{2}}\right)\right.\right.$

$+ \frac{1}{n\pi}\left((-3)(-1)^n + 1\right)\Big) =$

$(-2)\sin(n\pi) + (2)\sin(0)$ = 0

PAPCO STATIONERY

Scanned by CamScanner

Subject.

Date.

$$-\frac{1}{n\pi}\times\frac{1}{n\pi}\left(3(-1)^{n+1}+1\right)=\frac{-(3)(-1)^{n+1}+1}{n^2\pi^2}$$

به همین ترتیب:

$$b_n=\frac{1}{n\pi}a'_n+\frac{1}{n\pi}\sum\int_x \frac{\sin}{\cos}(n\pi t_k)$$

چون $f(t)$ جهش ندارد

$$=\frac{1}{n\pi}\left(-\frac{1}{n\pi}b''_n-\frac{1}{n\pi}\left(J_1 \sin(n\pi\times1)+J_2 \sin(n\pi\times0)\right)\right)$$

$$=-\frac{1}{n^2\pi^2}\left(\frac{1}{n\pi}a'''_n+\frac{1}{n\pi}\left(J''_1\cos(n\pi\times1)+J'_2\cos(n\pi\times0)\right)\right)$$

$J''_1=-2$, $J'_2=2$, $\cos(n\pi\times0)=1$

$$=-\frac{1}{n^3\pi^3}\left((-2)(-1)^n+2\right)=\frac{2(-1)^n-2}{n^3\pi^3}=$$

$$\begin{cases}0 & n \text{ زوج} \\ -\dfrac{4}{n^3\pi^3} & n \text{ فرد}\end{cases}$$

Scanned by CamScanner

Subject.

Date.

$$a_0 = \frac{2}{P_2}\int_0^2 f(t)\,dt = \int_0^1 (1+t^2)\,dt + \int_1^2 (3-t)\,dt = \left(t + \frac{1}{3}t^3\right)\Big|_0^1 + \left(3t - \frac{1}{2}t^2\right)\Big|_1^2$$

$$= \left(1+\frac{1}{3}\right) + \left(\left(6-\frac{4}{2}\right) - \left(3-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{4}{3} + \frac{3}{2} = \frac{17}{6}$$

بنابراین سری فوریه می‌شود:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2n\pi t}{P_2} + b_n \sin\frac{2n\pi t}{P}\right)$$

$$f(t) = \frac{17}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{(3(-1)^{n+1}+1)}{n^2\pi^2}\cos(n\pi t) + \frac{2(-1)^n - 2}{n^3\pi^3}\sin n\pi t\right)$$

(سری فوریه تابع دو ضابطه‌ای)

$f'(t) =$

Subject.

Date.

قضیه دیریکله:

انتگرال هر تابع متناوب که در شرایط قضیه دیریکله صدق کند می‌توان با انتگرال گیری جمله به جمله سری فوریه آن را بدست آورد.

قضیه: اگر تابع $f(t)$ در شرایط قضیه دیریکله صدق کند و مشتق آن نیز ($f'(t)$) در شرایط قضیه دیریکله صدق کند در اینصورت در نقاطی که $f'(t)$ موجود است می‌توان $f'(t)$ را با مشتق گیری جمله به جمله از سری فوریه بدست آورد.

از قبل داریم:

$$f(t)=t \xrightarrow{P=2} t=f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin n\pi t$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$$

Subject.
Date.

مثال: به کمک سری فوریه $f(t)=t$ ، سری فوریه $f(t)=t^2$ را بیابید:

در مثال های قبل می دانیم سری فوریه t = $f(t)$ به صورت

$$f(t)=t=\sum \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin n\pi t$$

از دو طرف انتگرال

$$\Longrightarrow \int t\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\int \sin(n\pi t)\,dt$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}t^2+C=\sum \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\times\left(\frac{-1}{n\pi}\cos(n\pi t)\right)$$

باید C را محاسبه کنیم برای این منظور کافی است در رابطه بالا $t=0$ در این صورت

$$\Longrightarrow 0+C=\sum \frac{2\,(-1)^{n+1}\times(-1)}{n^2\pi^2}=\frac{-2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

$$\frac{\pi^2}{12}$$

$$\Longrightarrow C=\frac{-2}{\pi^2}\times\frac{\pi^2}{12}=-\frac{1}{6}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}t^2-\frac{1}{6}=\sum \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\times\frac{-\cos(n\pi t)}{n\pi}$$

$$\Longrightarrow t^2-\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+2}}{n^2\pi^2}\cos(n\pi t)$$

PAPCO STATIONERY

Scanned by CamScanner

Subject.

Date.

انتگرال فوریه :

در توابعی که دامنه آن ها محدود نباشد و تناوبی نیز نباشند برای این توابع نمی‌توان سری فوریه مشخص کرد بلکه برای این توابع انتگرال فوریه مشخص می‌شود.

فرض کنید تابع $f(t)$ با دامنه R متناهی باشد یعنی

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt = L < \infty$$

(عدد)

و تعداد نقاط ناپیوستگی تابع f متناهی باشد در این صورت به شرط آنکه هر تابع f روی $f : R \to R$ در بازه $(-p, p)$ که با $f(p)$ آن را نشان دهیم یعنی (f که دامنه آن محدود شده)،

$$f\begin{cases} f : R \to R \\ (-p, p) : f_p \end{cases}$$

دارای سری فوریه باشد در این صورت برای $f(t)$ انتگرال فوریه به صورت زیر تعریف می‌شود.

Scanned by CamScanner

Date: ۹۸/۸/۱۲ Subject: ریاضی مهندسی

ادامه انتگرال فوریه:

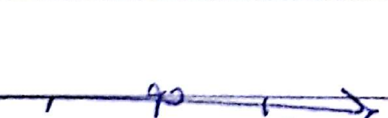
f

برای تابع f(t) که در شرایط دیریکله (که اگر همگرا باشد در هر بازه) صدق کند دارای صورت انتگرال فوریه تابع f به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\cos w(s-t)\,ds\,d\omega$$

شرایط دیریکله:

$f(t) \rightarrow D_f = \mathbb{R}$



① $f_p = f|_{[-p,p]}$ ← دارای سری فوریه باشد

۲) در هر بازه متناهی [a,b] تعداد نقاط ناپیوستگی f متناهی باشد

Subject: Date:

مثال: انتگرال فوریه تابع

یعنی ۱- تا ۱

$$f(t)=\begin{cases}1 & |t|\leq 1\\ 0 & |t|\nleq 1\end{cases}$$

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\cos\omega(s-t)\,ds\,d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-1}^{1} 1\cos(\overbrace{\omega(s-t)}^{\omega s-\omega t})\,ds\,d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{\omega}\sin\omega(s-t)\Big|_{-1}^{1}\,d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{\omega}\left(\sin\omega(1-t)-\sin(\omega(-1-t)\right)d\omega$$

بر طبق $(\sin(-\theta)=-\sin\theta)$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{\omega}\left(\sin(\omega-\omega t)+\sin(\omega+\omega t)\right)d\omega$$

$\sin(\omega)\cdot\cos(\omega t)-\cos\omega\cdot\sin\omega t$

$\sin\omega\cdot\cos\omega t+\cos\omega t\cdot\sin\omega t$

Scanned by CamScanner

Date: Subject:

$$\Rightarrow f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{\omega}\sin\omega\cdot\cos\omega t\,d\omega$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty}\frac{1}{\omega}\sin\omega\cdot\cos\omega t\,d\omega=\frac{\pi}{2}f(t)=\begin{cases}\frac{\pi}{4} & |t|<1\\ 0 & |t|>1\end{cases}$$

انتگرال فوریه را می‌توان به این صورت نیز نوشت :

$$f(t)=\int_0^{\infty}\left(A(\omega)\cos\omega t+B(\omega)\sin\omega t\right)d\omega$$

که

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(s)\cos\omega s\,ds$$

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(s)\sin\omega s\,ds$$

Scanned by CamScanner

Subject: Date:

حال اگر: $f(t)$ تابع فرد باشد آنگاه $A(\omega)=0$ ،

$$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(s)\sin\omega s\,ds$$

و اگر $f(t)$ زوج باشد آنگاه $B(\omega)=0$ ،

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(s)\cos\omega s\,ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty f(s)\cos\omega s\cos\omega t\,ds\,d\omega$$

Scanned by CamScanner

Date :

Subject :

ثابت کنید

$$\int_0^\infty \frac{\cos\frac{\pi\omega}{2}\cos\omega x}{1-\omega^2}\,d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\cos x & |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$f(t)$

تابع زوج است

اگر $f(t)$ تابع زوج است پس $B(\omega)=0$

پس باید $A(\omega)$ را بدست آورد. همچنین $A(\omega)$ می‌شود

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(s)\cos\omega s\,ds$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2}\cos s \cdot \cos\omega s\,ds$$

$$\frac{1}{2}\left(\cos(s+\omega s) + \cos(s-\omega s)\right)$$

$s(1+\omega)$ $\quad$ $s(1-\omega)$

Subject: Date:

$$=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(s(1+\omega))\,ds+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(s(1-\omega))\,ds\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\omega}\sin(s(1+\omega))+\frac{1}{1-\omega}\cdot\sin(s(1-\omega))\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\omega)}{1+\omega}+\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\omega)}{1-\omega}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\frac{\pi}{2}\omega}{1+\omega}+\frac{\cos\frac{\pi}{2}\omega}{1-\omega}\right)=$$

بر طبق

اتحادهای مثلثاتی

sin

$$=\frac{1}{2}\cos\frac{\pi\omega}{2}\left(\frac{1}{1+\omega}+\frac{1}{1-\omega}\right)$$

$$\frac{2}{(1+\omega)(1-\omega)}$$

Date:

Subject:

$$\Longrightarrow \boxed{A(\omega) = \frac{\cos \frac{\pi\omega}{2}}{1-\omega^2}}$$

بنابراین انتگرال فوریه تابع $f(t)$ بصورت :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\cos t & |t| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases} = \int_0^\infty A(\omega)\cos\omega t \, d\omega$$

$$= \int_0^\infty \boxed{\frac{\cos \frac{\pi\omega}{2} \cdot \cos\omega t}{1-\omega^2} \, d\omega}$$

Scanned by CamScanner

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

اگر معادله ای به شکل زیر باشد آن را یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی (خطی) مرتبه اول نامیم:

$$A(x,y)\frac{\partial Z}{\partial x}+B(x,y)\frac{\partial Z}{\partial y}+C(x,y)Z=f(x,y)$$

که A ، B ، C ، f توابعی برحسب x,y می باشند

در معادله فوق اگر $f(x,y)=0$ باشد آنگاه:

$$A(x,y)\frac{\partial Z}{\partial x}+B(x,y)\frac{\partial Z}{\partial y}+C(x,y)Z=0$$

همگن

Z_g جواب عمومی همگن

Z_p یک جواب خصوصی معادله همگن

Date: .... Subject: ....

ها کنید معادلات دیفرانسیل اگر Z_1 و Z_2 دو جواب معادله ی

همگن باشند آنگاه $Z = C_1Z_1 + C_2Z_2$ نیز جواب معادله ی همگن

است. همچنین اگر Z_g جواب عمومی معادله ی همگن و Z_p

یک جواب خصوصی معادله ی یک باشد (Z تابعی برحسب x, y

است) بنابراین $Z = Z_g(x,y) + Z_p(x,y)$ جواب عمومی

معادله یک است.

منظور از پیدا کردن جواب یک معادله دیفرانسیل این است که تابع

Z را برحسب x, y طوری بیابیم که در معادله صدق کند در ادامه

می خواهیم روش حل بعضی از معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

Subject: Date:

را بیان کنیم.

اگر معادله دیفرانسیل به فرم زیر باشد:

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = f(x,y) \quad -1$$

که $a,b,c \in \mathbb{R}$ برای حل این معادله دیفرانسیل بدین

صورت عمل می‌کنیم که:

Scanned by CamScanner

Subject. ۹۸/۸/۱۹

Date.

برای حل این نوع معادلات کافی است cZ را به طرف دیگر رابطه برده و به کمک رابطه تقارن و از رابطه کلی زیر استفاده کنیم:

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dZ}{f(x,y) - cZ}$$

مثال:

$$\frac{\partial Z}{\partial x} + 4\frac{\partial Z}{\partial y} = \log(2x+3y)$$

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{4} = \frac{dZ}{\log(2x+3y)}$$

تساوی اول: $dx = \frac{dy}{4} \rightarrow \int 4dx = \int dy \rightarrow y = 4x + C$

$\rightarrow y - 4x = C_1$

بنابراین از تساوی دوم:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dZ}{\log(2x + 3(4x + C_1))}$$

$\underbrace{}_{14x + C_2}$

Subject.

Date.

$$\Longrightarrow \int dZ = \int \log(\overbrace{14x + C_2}^{u})\, dx$$

$$= Z = \frac{1}{14}\int \frac{14}{u'} \log(\overbrace{14x + C_2}^{u})\, dx = \frac{1}{14}(14$$

$$= \frac{1}{14}\left((14x + C_2)\log(14x + C_2) - (14x + C_2)\right)$$

لذا جواب عمومی معادله به فرم:

$$Z = \frac{1}{3}(y - 4x) + \frac{1}{14}\left((14x + C_2)\log(14x + C_2)\right.$$

$$\left. - (14x + C_2)\right)$$

نحوه بدست آوردن لگاریتم جزء به جزء

$$\int \underbrace{\ln x}_{u}\, \underbrace{dx}_{dv} = x\ln x - \int \frac{x}{x}\, dx = x\ln x - x$$

$$u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x}dx$$

$$dv = dx \longrightarrow v = \int dx = x$$

Scanned by CamScanner

Subject.

Date.

مثال: جواب عمومی معادله زیر را بدست آورید:

$$\frac{\partial z}{\partial x}+3\frac{\partial z}{\partial y}=2x-y$$

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{3}=\frac{dz}{2x-y}$$

① $\frac{dx}{1}=\frac{dy}{3}\to\int dx=\int\frac{dy}{3}\Rightarrow x=\frac{1}{3}y+c_1$

$\Rightarrow \varphi\left(x-\frac{1}{3}y\right)=c_1$

حال برای جواب خصوصی از تساوی دوم و ① استفاده می‌کنیم:

$$\frac{dy}{3}=\frac{dz}{2\left(\frac{1}{3}y+c_1\right)-y}=\int 3\,dz=\int\left(-\frac{1}{3}y+c_1\right)dy$$

$-\frac{1}{3}y+c_1$

$\Rightarrow 3z=-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}y^2+c_1y \Rightarrow z=-\frac{1}{18}y^2+\frac{1}{3}c_1y$

جواب خصوصی

$$z=\varphi\left(x-\frac{1}{3}y\right)-\frac{1}{18}y^2+c_1y$$

جواب عمومی

PAPCO STATIONERY

Scanned by CamScanner

اعداد مختلط:

Subject.
Date.

مجموعه‌ی اعداد مختلط به فرم: $\mathbb{C} = \{x+yi \mid x,y \in \mathbb{R}\}$

تعریف می‌شوند. در هر عدد مختلط به صورت $z = x+yi$،

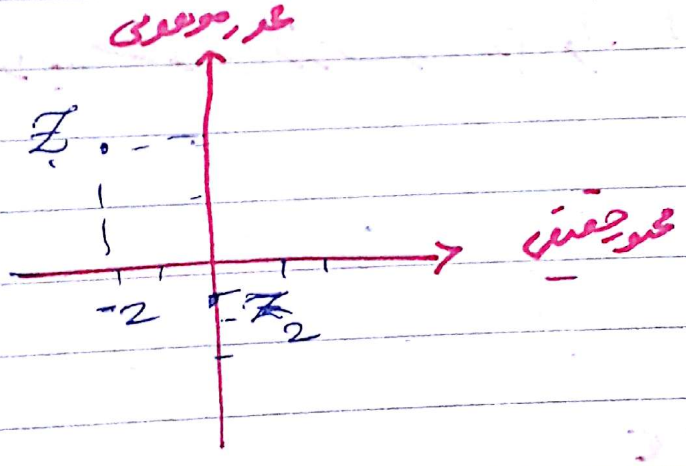
x را قسمت حقیقی و y را قسمت موهومی z می‌نامیم یعنی:

x = قسمت حقیقی = $\mathrm{Re}\,z$

$\overline{z}$

y = قسمت موهومی = $\mathrm{Im}\,z$

هر عدد مختلط را می‌توان در صفحه‌ای که آن را صفحه مختلط می‌نامند به صورت زیر نمایش داد:



$z_1 = -2+2i$

$z_2 = -\frac{1}{2}i$

تعریف:

$z_1 = x_1 + y_1 i$

$z_2 = x_2 + y_2 i$

$\Rightarrow z_1 = z_2 \iff \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$

دو عدد مختلط z_1 و z_2 را برابر گوییم هرگاه قسمت‌های حقیقی و موهومی آن‌ها با هم برابر باشد

یعنی 2 ⟵

PAPCO
Scanned by CamScanner

تعریف: اگر $Z_1 = x_1 + y_1 i$ و $Z_2 = x_2 + y_2 i$ آنگاه

1) $Z_1 \pm Z_2 = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2) i$

2) $cZ_1 = cx_1 + cy_1 i \quad (c \in \mathbb{R})$

3) $Z_1 \cdot Z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) =$

$(x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i$

مثال:

$3(2-5i) - 2(\frac{1}{2} + i) =$

$(6 - 15i) - (1 + 2i) = 5 - 17i$

$(3+i)(2-4i) = (6+4) + (-12+2)i = 10 - 10i$

$(-2+i)(-3+2i) = (6-2) + (-4+3)i = 8 - i$

$i \times i = (0 + 1i)(0 + 1i) = (0-1) + (0+0)i = -1$

i^2

Subject.
Date.

$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

باتوجه به اینکه هر عدد حقیقی x را می‌توان به فرم: $x = x + 0i$

بنابراین هر عدد حقیقی یک عدد مختلط است. ~~$x = x + 0i$~~

از طرفی جمع و ضرب دو عدد حقیقی با جمع و ضرب آن‌ها به عنوان دو عدد مختلط یکی می‌باشد. پس می‌توان گفت: $\mathbb{R} \in \mathbb{C}$

اثبات:

$$(x + 0i) + (y + 0i) = (x + y) + 0i = x + y$$

$$(x + 0i)(y + 0i) = (xy - 0) + (0 + 0i)i = xy$$

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow x = x + 0i \in \mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

• واضح است که $1 + 0i$ عضو خنثی ضرب می‌باشد:

$$(x + yi)(1 + 0i) = (x - 0) + (0 + y)i = x + yi$$

($1 + 0i = 1$)

Scanned by CamScanner

Subject.

Date.

4) $\frac{1}{Z} = \frac{1}{x+yi} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) + \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) i$

Z^{-1}

5) $\frac{Z_1}{Z_2} = Z_1 \cdot \frac{1}{Z_2}$

اگر $Z_2 \neq 0$ در اینصورت تقسیم می‌شود

مثال :

$$\frac{1}{-5+3i} = \frac{-5}{25+9} + \frac{-3}{25+9} i = \frac{-5}{34} - \frac{3}{34} i$$

مثال تقسیم :

$$\frac{2+i}{1-2i} = (2+i)\left(\frac{1}{(1-2i)}\right)$$

$$= (2+i)\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5} i\right)$$

$$= \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{4}{5} + \frac{1}{5}\right) i = i$$

تمرین :

$$\frac{-3+4i}{i}, \quad \frac{2+i}{-2+3i}, \quad (-1+i)^3$$

Scanned by CamScanner

Subject.

Date.

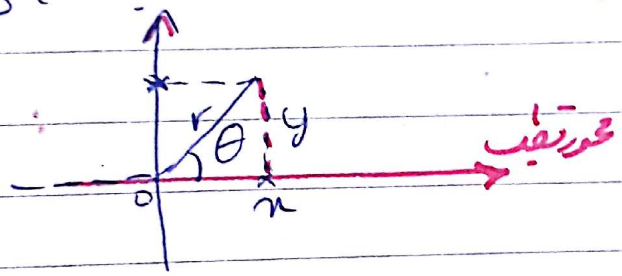
فرم قطبی اعداد مختلط

هر نقطه در صفحه مانند $A\left|\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right.$ را می‌توان با مختصات دیگری که آن را مختصات قطبی نقطه A می‌نامیم نیز نمایش داد:

$A\left|\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right.$

که r، فاصله نقطه A تا ~~مختصات~~ مبدا،

θ زاویه‌ای که OA با محور قطب (همان محور xهای مثبت) می‌سازد.



به عنوان مثال: $A\left|\begin{smallmatrix}3\\\frac{\pi}{3}\end{smallmatrix}\right.$

اگر نقطه $A\left|\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right.$ مختصات دکارتی نقطه A باشد این دو مختصات با روابط زیر قابل تبدیل به یکدیگر است:

$\cos\theta = \frac{x}{r} \rightarrow$ $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta = \frac{y}{x} \end{cases}$

$\sin\theta = \frac{y}{r} \rightarrow$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

فرم قطبی اعداد مختلط

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject.

Date. ۹۸/۹/۳

مثال: فرم قطبی اعداد مختلط زیر را بیابید:

الف) $Z = \underset{x}{3} - \underset{y}{3}i$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \sqrt{9+9} = \sqrt{18}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

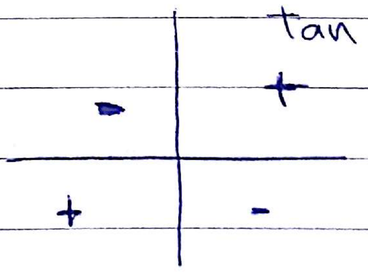
$$\tan\theta = \frac{-3}{3} = -1 \longrightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} \text{ یا } \pi - \frac{\pi}{4}$$

با توجه به اینکه در کجا قرار دارد:

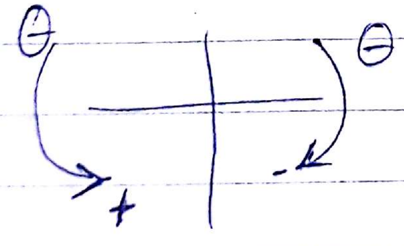
دوم	اول
سوم	چهارم

↓ در ناحیه چهارم قرار گرفته

پس $-\frac{\pi}{4}$ مورد قبول است



θ	$\tan\theta$
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	تعریف نشده
π	0
2π	0



(۴) تمرین های آخر ساعت را تحویل بدیم هفته دیگه

Subject:

Date.

ب) $z = -3 + \sqrt{3}i$ $\quad r = \sqrt{9+3} = \sqrt{12}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{-3} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \theta = \cancel{\frac{\pi}{-6}}$ یا $\pi - \frac{\pi}{6}$

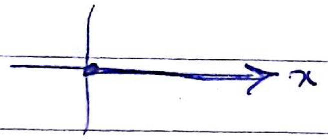
$\frac{5\pi}{6}$

ج) $z = 5$

$r = \sqrt{25+0} = 5(\cos 0 + i\sin 0)$

$\tan\theta = \frac{0}{5} = 0 \rightarrow \theta = 0$ یا $\cancel{\pi}$

چون x + است پس باید روی محور x های مثبت



دنبال θ بگردیم حسابا می شود $\theta = 0$

د) $z = -\sqrt{3}$ $\quad r = \sqrt{3+0} = \sqrt{3}(\cos\pi + i\sin\pi)$

$\tan\theta = \frac{-\sqrt{3}}{0} = 0 \rightarrow \theta = \cancel{0}$ یا π

چون x منفی است پس π قبول است

Scanned by CamScanner

Subject

Date

جمع و ضرب در فرم قطبی :

اگر $Z_2 = r_2 (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, $Z_1 = r_1 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$

در این صورت $Z_1 \cdot Z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$

1) ~~$\frac{1}{Z} = \frac{1}{r_1} (\cos(-\theta_1) + i\sin(-\theta_1))$~~

2) $\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{r_1} (\cos(-\theta_1) + i\sin(-\theta_1))$

3) $\frac{Z_1}{Z_2} = Z_1 \cdot \frac{1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2))$

$Z_1 \cdot Z_2 = r_1 r_2 ((\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2))$

$(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) +$

$\cos(\theta_1+\theta_2)$

$(\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2)i$

$\sin(\theta_1+\theta_2)$

Scanned by CamScanner

Subject.
Date.

تعریف: توان اعداد مختلط به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$Z^2 = Z \cdot Z \ , \ Z^3 = Z \cdot Z^2 , \ldots$

$$Z^n = Z^{n-1} \cdot Z \quad (n \in \mathbb{N})$$

قضیه دموآور: اگر $Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $n \in \mathbb{N}$ آنگاه:

$$Z^n = r^n (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

مثال:

$$(-6-6i)^{20}$$

$r = \sqrt{36+36} = \left(\sqrt{72}\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)\right)^{20}$

$\tan\theta = 1 \rightarrow \frac{\pi}{4}$ یا $\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

چون هر دو منفی هستند
پس ربع اول نیست

ادامه

$(\sqrt{72})^{20}\left(\cos\frac{100\pi}{4} + i\sin\frac{100\pi}{4}\right)$

$25\pi \qquad 25\pi$

توضیحات بیشتر
$= (72)^{10}(-1+0)$
$= -(72)^{10}$

PAPCO STATIONERY

مثال:

Subject. $\left(\dfrac{2+2i}{-1+\sqrt{3}i}\right)^{100}$

Date.

ابتدا صورت را قطبی می‌کنیم سپس مخرج و به صورت $\dfrac{z_1}{z_2}$ انجام می‌دهیم:

$$2+2i \Longrightarrow \sqrt{8}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$r=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$$

$$\tan\theta=\frac{2}{2}=1 \rightarrow \theta=\frac{\pi}{4} \text{ یا } \cancel{\pi+\frac{\pi}{4}}$$

$$-1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$r=\sqrt{1+3}=2$$

$$\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3}\rightarrow\theta=\cancel{-\frac{\pi}{3}} \text{ یا } \underbrace{\pi-\frac{\pi}{3}}_{\frac{2\pi}{3}}$$

$$\left(\frac{2+2i}{-1+\sqrt{3}i}\right)^{100}=\left(\frac{\sqrt{8}}{2}\left(\cos\underbrace{\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}\right)}_{-\frac{5\pi}{12}}+i\sin\underbrace{\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)}_{-\frac{5\pi}{12}}\right)\right)^{100}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{8}}{2}\right)^{100}\left(\cos\left(-\frac{500\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{500\pi}{12}\right)\right)$$

Scanned by CamScanner

Subject.

Date.

مثال :

$$\left((-4+4i)(-3-\sqrt{3}\,i)\right)^{15}$$

$$z_1 = -4+4i = \sqrt{32}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

$$r = \sqrt{32}$$

$$\tan\theta = \frac{4}{-4} = -1 \rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} \ \text{یا} \ \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) \qquad -\frac{3\pi}{4}$$

چون x منفی است.

$-\frac{3\pi}{4}$ قابل قبول است.

(چون زاویه منفی است $-\frac{\pi}{4}$ را گرفتیم)

$$z_2 = (-3-\sqrt{3}\,i) = \sqrt{12}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$$

$$r = \sqrt{12}$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \ \text{یا} \ \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

طبق ضرب اعداد مختلط

$$\left((-4+4i)(-3-\sqrt{3}\,i)\right)^{15} =$$

$$\left(\sqrt{384}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{7\pi}{6}\right)\right)\right)^{15}$$

$$= \left((\sqrt{384})\left(\cos\left(\frac{23\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{23\pi}{12}\right)\right)\right)^{15}$$

$$= (\sqrt{384})^{15}\left(\cos\left(\frac{345\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{345\pi}{12}\right)\right)$$

Scanned by CamScanner

Subject.

Date.

تمرین‌های تحویلی به استاد:

$$\frac{5-10i}{2+4i}\ ,\ \left(\frac{-\sqrt{3}+i}{5+5i}\right)^{30}\ ,\ \left(\sqrt{6}-\sqrt{18}\,i\right)^{6}$$

$$\left(\frac{7-7\sqrt{3}\,i}{-1+i}\right)^{3}\ ,\ \left((12+12i)(-3-\sqrt{3}\,i)\right)^{5}$$

98,9,17

ریشه‌های nام عدد مختلط:

$Z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

ریشه‌های nام عدد Z که با $\sqrt[n]{Z}$ نمایش می‌دهیم، عددی مانند Z_0 است به طوری که $Z_0^n=Z$ در قضیه‌ی زیر نشان می‌دهیم که ریشه‌های nام عدد Z، n مقدار است.

فرض کنید $Z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ و $n\in\mathbb{N}$ در این صورت

$$\sqrt[n]{Z}=Z^{1/n}=r^{1/n}\left(\cos\left(\frac{2k\pi+\theta}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi+\theta}{n}\right)\right)$$

$k=0,1,2,\dots,n-1$

Scanned by CamScanner

مثال :

Subject.

Date.

$\sqrt[5]{3}$, $\sqrt[4]{2-2i}$, $\sqrt[6]{-1}$, $\sqrt[3]{\frac{1+i}{-1+\sqrt{3}i}}$

$x^5 = 3 \to x = \sqrt[5]{3}$

$\sqrt[5]{3} = (r(\cos\theta + i\sin\theta))^{1/5} = \sqrt[5]{3}$

$\begin{cases} r = \sqrt{9+0} = 3 \\ \tan\theta = \frac{0}{3} = 0 \quad \theta = 0 \end{cases}$

$3 = 3 + 0i = 3(\cos 0 + i\sin 0) \to$

$\sqrt[5]{3} = 3^{1/5}\left(\cos\frac{2k\pi+0}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi+0}{5}\right)$

$k = 0, \dots, 4$

$\sin(k\pi \pm \theta) = \sin\theta$

$\cos(k\pi \pm \theta) = \cos\theta$

$k=0 \to z_1 = 3^{1/5}(\cos 0 + i\sin 0) = 3^{1/5}$

$k=1 \to z_2 = 3^{1/5}\left(\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}\right)$

$k=2 \to z_3 = 3^{1/5}\left(\cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5}\right)$

$k=3 \to z_4 = 3^{1/5}\left(\cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5}\right)$ مزدوج

$k=4 \to z_5 = 3^{1/5}\left(\cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5}\right)$ مزدوج

معادل $2\pi - \frac{2\pi}{5}$

$\frac{6\pi}{5} = 2\pi - \frac{4\pi}{5}$

PAPCO STATIONERY

Scanned by CamScanner

$-\frac{\pi}{4}=$ ناحیه چهارم $\qquad \pi-\frac{\pi}{4}=$ ناحیه دوم

Subject.

Date.

• ریشه‌های n ام Z یعنی $Z^{1/n}$ رئوس یک n ضلعی منتظم را تشکیل می‌دهد

ادامه قبل

$$3^{1/5}\left(\cos\left(2\pi-\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(2\pi-\frac{2\pi}{5}\right)\right)$$

(ناحیه چهارم)

$$=3^{1/5}\left(\cos\frac{2\pi}{5}-i\sin\frac{2\pi}{5}\right)$$

طبق دایره مثلثاتی

$$\sqrt[4]{2-2i}=\sqrt{8}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\begin{cases} r=\sqrt{8} \\ \tan\theta=\frac{-2}{2}=-1 \rightarrow \theta=-\frac{\pi}{4} \text{ یا } \cancel{\pi-\frac{\pi}{4}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow Z^{\frac{1}{4}}=(\sqrt{8})^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{2k\pi-\frac{\pi}{4}}{4}+i\sin\frac{2k\pi-\frac{\pi}{4}}{4}\right)$$

$k=0,1,2,3$

Scanned by CamScanner

Subject.

Date.

(۴) صورت غلط است به خاطر ا.

$\sqrt[6]{-1} = \cos \pi + i \sin \pi$

$\begin{cases} r = 1 \\ \tan\theta = \frac{0}{-1} \Rightarrow 0 \text{ یا } \pi \end{cases}$

چون x- پس π است

$\sqrt[6]{-1} = \cos\left(\frac{2k\pi + \pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi + \pi}{6}\right)$

چون رادیکال با فرجه ۶ است نوشته نمی‌شود

$k = 0, \ldots, 5$

معادلات زیر را حل کنید.

الف) $z^2 + 3z + 5 = 0$

$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 20}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-11}}{2}$

چون $\sqrt{-11}$ فرجه زوج است پس دو جواب دارد

$= \frac{3 \pm \sqrt{11}\,i}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{11}\,i}{2}$

$\sqrt{-1} = i^2$ به جای

$\Rightarrow z_1 = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{11}{2}}\, i$

$z_2 = \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{11}{2}}\, i$

در معادلات درجه ۲ که منفی زیر رادیکال باشد ریشه دارد که به این صورت حل می‌شود

PAPCO STATIONERY

Scanned by CamScanner

Subject:

Date:

$$\sqrt[3]{\frac{1+i}{-1+\sqrt{3}i}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}\right)\right)}$$

$-\frac{5\pi}{12}$

$$=\left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\cos\left(\frac{2k\pi-\frac{5\pi}{12}}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi-\frac{5\pi}{12}}{3}\right)\right)$$

$$Z_1 = 1+i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\begin{cases} r_1 = \sqrt{2} \\ \tan\theta_1 = \frac{\pi}{4} \text{ یا } \pi+\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$k=0,1,2$

$$Z_2 = -1+\sqrt{3}i$$

$$\begin{cases} r_2 = 2 \\ \tan\theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{-1} \Rightarrow \frac{\pi}{3} \text{ یا } \pi-\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

ه) $x^2+10=0$ $\quad x^2=-10 \Rightarrow x=\sqrt{-10}=\sqrt{10i^2}=$

$\pm\sqrt{10}\,i$

ح) $(1+Z)^5 = Z^5$

هر معادله از درجه n، n ریشه دارد

$$\longrightarrow \left(\frac{1+Z}{Z}\right)^5 = 1 \rightarrow \left(\frac{1+Z}{Z}\right)^5 = 1$$

ریشه پنجم $\rightarrow \frac{1+Z}{Z} = \sqrt[5]{1} = \sqrt[5]{1+0i} =$

$(\cos 0 + i\sin 0)$

$$\cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{5}\right) \qquad k=0,1,\dots,4$$

PAPCO STATIONERY

Scanned by CamScanner

Subject.
Date.

اگر $k=0 \to \frac{1-z}{z} = \cos 0 + i\sin 0 \Rightarrow 1-z =$

$z \Rightarrow 2z = 1 \Rightarrow z = \frac{1}{2}$

اگر $k=1 \Rightarrow \frac{1-z}{z} = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} \Rightarrow$

$z(\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} + 1) = 1 \Rightarrow$

$z = \frac{1}{(\cos\frac{2\pi}{5}+1) + i\sin(\frac{2\pi}{5})}$

اگر $k=2 = \frac{1-z}{z} = \cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5} \Rightarrow$

$z = \frac{1}{\cos(\frac{4\pi}{5})+1) + i\sin\frac{4\pi}{5})}$

$k=3 \longrightarrow$

$k=4 \longrightarrow$

Scanned by CamScanner

Subject.

Date.

۱) نشان دهید اگر Z عدد مختلط باشد آنگاه

$$1+Z+Z^2+\dots+Z^{n-1}=\frac{1-Z^n}{1-Z}$$

همچنین اگر Z یکی از ریشه های n ام عدد یک (به جز خود یک) باشد

آنگاه $1+Z+\dots+Z^{n-1}=0$

۲) به کمک اعداد مختلط نشان دهید:

$$\begin{cases}\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \\ \sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta\end{cases}$$

۳) معادلات زیر را حل کنید:

$Z^6=-\sqrt{3}-i$ ، $Z^2+Z+1=0$ ، $Z^4+2Z^2+5=0$

$\sqrt[8]{-3}$ ، $\sqrt[2]{-5}$ ، $\sqrt[4]{2-2\sqrt{3}i}$ ، $(-3\sqrt{3}+3i)^{20}$ ،

$(-5-5i)^{100}$ ، $\left(\frac{-2+2i}{6-2\sqrt{3}i}\right)^{15}$

Scanned by CamScanner

98/9/24

تمرین 2 . اثبات :

Subject.

Date.

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$z = \cos\theta + i\sin\theta \xrightarrow{\text{(دموآور)}} z^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$ — حقیقی

رابطه 2

$z = \cos\theta + i\sin\theta \rightarrow$ از طرفی z^3 را می‌توان به صورت زیر نیز بدست آورد

$$z^3 = (\underline{\cos\theta}_{a} + \underline{i\sin\theta}_{b})^3$$

طبق:

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \qquad i \times i^2 = -i$

$= \cos^3\theta + (i\sin\theta)^3 + 3i\cos^2\theta\sin\theta +$

$3(i\sin)^2\cos\theta + (i\sin\theta)^3$

$= \cos^3\theta - i\sin^3\theta + 3i\sin\theta\cos^2\theta -$

$3\sin^2\theta\cos\theta - i\sin^3\theta$

$= (\cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta) + (-\sin^3\theta + 3\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta)i$ ①

حقیقی

①, ② $\Rightarrow \cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\underbrace{\sin^2\theta}_{1-\cos^2\theta}\cos\theta$ (رابطه ۱)

PAPCO STATIONERY

Scanned by CamScanner

Subject.

Date.

$= \cos^3\theta - 3(1-\cos^2\theta)\cos\theta$

$= \dfrac{\cos^3\theta + 3\cos^3\theta - 3\cos\theta}{4\cos^3\theta}$

توابع مختلط :

$f(x) = x^3 - 5x + \sin x$

$D_f \in \mathbb{R} \quad , \quad R_f \subseteq \mathbb{R}$

$f(0) = 0 + \sin 0 = 0 \in \mathbb{R} \qquad f(2) = 8 - 10 + \sin 2 =$
$-2 + \sin 2 \in \mathbb{R}$

تابع مختلط روی IR :

~~$f(t) = (t^2$~~

تابع مختلط روی IR به فرم کلی

$f(t) = x(t) + y(t)i$ (تابع حقیقی مقدار)

که $x(t)$ و $y(t)$ توابع حقیقی مقدار باشند (تابع حقیقی مقدار)

به عنوان مثال :

$f(t) = (t^2 - 5t) + \left(\dfrac{t^3 - 1}{t^2 + 1}\right) i \in \mathbb{C}$ ($x(t)$ ، $y(t)$)

$f(1) = -4 + \frac{0}{2} i = -4$

$f(2) = (4 - 10) + 7/5 \longrightarrow f(2) = -6 + \frac{7}{5} i \in \mathbb{C}$

PAPCO STATIONERY

Scanned by CamScanner

Subject. $\lim f(z) = \lim u(x,y) + \lim v(x,y)i$

Date.

$z \to z_0$ $\quad (x,y)\to(x_0,y_0)$ $\quad (x,y)\to(x_0,y_0)$

مثال:

$\lim\left(\underbrace{(x^2-y^2)}_{u(x,y)}+2\underbrace{xyi}_{v(x,y)}\right) = \lim(x^2-y^2) + \lim(2xy)i$ (the whole expression is labelled $f(z)$)

$(x,y)\to(2,-3)$ $\quad (x,y)\to(2,-3)$

$x+yi = z \to 2-3i$

$\begin{cases} x \to 2 \\ y \to -3 \end{cases} \Rightarrow (x,y)\to(2,-3)$

$= (4-9) + 2(2)(-3)i$

$= -5-12i$

مثال: اگر $f(z) = |z|^2$ مطلوب است:

$\lim_{z \to -1+i} f(z)$

Subject.

Date.

اندازه اعداد مختلط

اگر $Z = x + yi$ در اینصورت اندازه ی Z را با $|Z|$ نمایش میدهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

تعریف: $|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

مثال:

$$Z = -5 + 2i \rightarrow |Z| = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$$

اگر $Z = x + yi$ در اینصورت مزدوج Z را با $\bar{Z}$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

(قسمت موهومی در یک منفی ضرب می شود)

$$\bar{Z} = x - yi$$

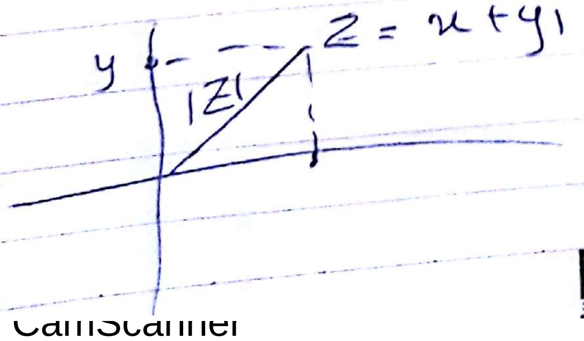
مثال:

$$Z = \sqrt{2} - \frac{1}{3} i \rightarrow \bar{Z} = \sqrt{2} + \frac{1}{3} i$$

$$Z \cdot \bar{Z} = (x + yi)(x - yi) = (x^2 + y^2) + \underbrace{(-xy + xy)}_{0} i$$

$$= x^2 + y^2 = |Z|^2$$

* هر عدد در مزدوج ضرب شود می شود اندازه اش به توان دو



Scanned by CamScanner

خواص مزدوج و اندازه :

Subject.

Date.

1) $\bar{\bar{Z}} = Z$

2) $\overline{Z_1 + Z_1} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2$

3) $\overline{Z_1 Z_2} = \bar{Z}_1 . \bar{Z}_2$

4) $\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2}$

5) $Z . \bar{Z} = |Z|^2$

6) $Z + \bar{Z} = 2 . \text{Re} Z$ (بخش موهومی حذف می شود 2x می ماند)

$Z - \bar{Z} = 2 . \text{Im} Z i$ (دو برابر قسمت موهومی ضرب در i)

7) $|Z_1 Z_2| = |Z_1||Z_2|$

8) $\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$

9) $|Z| = |\bar{Z}|$

10) ~~$Z = x + yi$~~ $\text{Re} Z \leq |\text{Re} Z| \leq |Z|$

$x \leq |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$

$\text{Im} Z \leq |\text{Im} Z| \leq |Z|$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject.

Date.

مثال: اگر $f(Z)=|Z|^2$ مطلوب است:

$$\lim f(Z)$$
$$x+yi=Z\to -1+i$$

$$f(Z)=f(x+yi)=|Z|^2=x^2+y^2=(x^2+y^2)+0i$$

(u و v)

چون:

$$\lim f(Z)=\lim(x^2+y^2)=1+1=2$$

$$Z\to -1+i \qquad (x,y)\to(-1,1)$$

مشتق تابع مختلط:

اگر $f(Z)=u(x,y)+v(x,y)i$ آنگاه مشتق تابع f در نقطه $Z_0=x_0+y_0 i$ را با نماد $f'(Z_0)$ نمایش داده به صورت زیر تعریف کنیم:

$$f'(Z_0)=\lim_{\Delta Z\to 0}\frac{f(Z_0+\Delta Z)-f(Z_0)}{\Delta Z}$$

که $\Delta Z=\Delta x+\Delta y i$

یادآوری:

$$u(x,y)=x^5-10xy^3+7y^2-x+1$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=5x^4-10y^3-1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-30xy^2+14y$$

PAPCO STATIONERY

Scanned by CamScanner

Subject.
Date.

تذکر: دو تابع $u(x,y)$ و $v(x,y)$ که در شرط کشی ـ ریمان صدق می کنند هرگاه دو تساوی زیر برقرار باشد:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{-\partial u}{\partial y}$$

قضیه: اگر $f'(z_0)$ که $z_0=x_0+y_0 i$ موجود باشد آنگاه شرایط کشی ریمان در (x_0,y_0) برقرار است یعنی

نتیجه: اگر $f(z)$ در شرایط کشی ریمان صدق نکند $f'(z)$ موجود نیست

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=-\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \quad , \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{x_0,y_0}$$

قضیه: اگر $f(z)=u+vi$ و شرایط کشی ـ ریمان برای u و v برقرار باشد و u و v و مشتقات جزئی آنها پیوسته باشند آنگاه $f'(z_0)$ موجود است.

مثال: اگر $f(z)=(\underbrace{x^2y+y^2}_{u})+(\underbrace{-\frac{1}{3}x^3+xy^2}_{v})i$ آیا f در شرایط کشی ریمان صدق می کند؟

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xy=\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-x^2+y^2 \quad \frac{\partial u}{\partial y}=x^2+2y \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x}\neq-\frac{\partial u}{\partial y}$$

لذا تابع مشتق پذیر نمی باشد

PAPCO STATIONERY
Scanned by CamScanner

پنجشنبه

Subject. **تمرین ۴:** نامساوی مثلث در اعداد مختلط برقرار است یعنی:

Date.

$$|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$$

$$\leq \sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}$$

برهان: $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2).\overline{(z_1+z_2)}=$

$$(z_1+z_2).(\bar{z}_1+\bar{z}_2)$$

$$=\underbrace{z_1\bar{z}_1}_{|z_1|^2}+\underbrace{z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1}_{A}+\underbrace{z_2\bar{z}_2}_{|z_2|^2}$$

$$\leq |z_1|^2+2|z_1||z_2|+|z_2|^2 = (|z_1|+|z_2|)^2$$

$$A=z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1=z_1\bar{z}_2+\overline{z_1\bar{z}_2}=$$

$$2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)\leq 2|z_1\bar{z}_2|=2|z_1||\bar{z}_2|$$

$$=2|z_1||z_2|$$

Scanned by CamScanner

۹۸ /۱۰/ ۱

Subject.

Date.

قضیه: اگر $f = u + vi$ و $u(x,y)$ و $v(x,y)$

توابع دو متغیره پیوسته با مشتقات جزئی پیوسته باشد آنگاه اگر

u و v در شرایط کشی - ریمان در نقطه z_0 صدق کند آنگاه $f(z)$

در z_0 مشتق پذیر است یعنی $f'(z_0)$ موجود است.

مثال: نشان دهید تابع $f(z) = z^2$ مشتق پذیر است.

$z = x + yi \Rightarrow z^2 = (x+yi)(x+yi) = (x^2 - y^2) + 2xyi$

$f(z) = f(x+yi) = (x^2 + y^2) + 2xyi$

$u(x,y)$ $\quad$ $v(x,y)$

واضح است که u و v پیوسته با مشتقات جزئی پیوسته است. از طرفی

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2x \\ \frac{\partial v}{\partial y} = 2x \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = 2y \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -2y \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (2)$$

PAPCO STATIONERY

Scanned by CamScanner

از ① و ② $\Leftarrow$ u و v در شرایط کشی - ریمان صدق می‌کند

پس تابع $f(z) = z^2$ در تمام نقاط صفحه مشتق پذیر است. (تام)

تعریف

تابع $f(z)$ را تام نامیم هرگاه f در نقاط صفحه مشتق پذیر باشد.

مثال:

نشان دهید تابع $f(z) = z^3$ تام است.

ابتدا z^3 را تشکیل می‌دهیم.

$$f(z) = f(x+yi) = (x+yi)^3$$

شرط کشی - ریمان وجود دارد.

$$\Rightarrow x^3 + (y^3 i^3) + 3ix^2y + 3i^2xy^2$$

در تمام نقاط پیوستگی وجود دارد و مشتقات جزئی ~~وجود دارد~~.

$y^3 i^3 = -iy^3$

حاصل z^3:

$$\Rightarrow f(z) = (x^3 - 3xy^2) + (-y^3 + 3x^2y)i$$

قسمت حقیقی u ، موهومی v

• واضح است که v و u پیوسته با مشتقات جزئی پیوسته است:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$\rightarrow$ شرایط کشی ریمان برقرار است $\Rightarrow$ $f(z)$ در تمام نقاط صفحه مختلط مشتق پذیر است.

PAPCO STATIONERY

Scanned by CamScanner

Subject. Date.

مثال: $f(z)=\bar{z}=x-yi=x+(-y)i$ ($u=x$, $v=-y$)

$\frac{\partial u}{\partial x}=1 \neq \frac{\partial v}{\partial y}=-1 \Rightarrow$ کشی-ریمان برقرار نیست $\Leftarrow$ مشتق پذیر نیست

مثال: $f(z)=z\bar{z}$ و $f(z)=|z|^4$

تعریف: تابع $f(z)$ در نقطه z_0 تحلیلی است هرگاه $f'(z_0)$ موجود باشد و تابع $f(z)$ در یک همسایگی نقطه z_0 (همسایگی z_0 یعنی دایره‌ای به مرکز z_0 و شعاع δ) در تمام نقاط آن همسایگی نیز مشتق پذیر باشد.

(توابع تام هم تحلیلی هستند ولی هر تحلیلی برعکس آن ~~...~~ هم تام صدق نمی‌کند)

تذکر: در تابع $f(z)=u(x,y)+v(x,y)$ اگر $f(z)$ مشتق پذیر باشد یعنی در شرایط کشی-ریمان صدق می‌کند پس در اینصورت $f'(z)$ به صورت:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}i=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial i}=f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}i$$

($\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$)

بنابراین چون u و v در شرایط کشی-ریمان صدق می‌کنند پس داریم

PAPCO STATIONERY

Scanned by CamScanner

فقط قسمت حقیقی f، یعنی $u(x,y)$ می‌توان آن $f'(z)$ را به کمک روابط صفحه قبل محاسبه کرد.

مثال: اگر $u(x,y)=x^5y^2-6x^3y$ قسمت حقیقی تابع $f(z)$ باشد، مطلوب است $f'(z)=$

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}i=5x^4y^2-18x^2y-(2x^5y-6x^3)i$$

تعریف: تابع $\varphi(x,y)$ را همساز نامیم هرگاه مشتقات جزئی φ موجود و پیوسته باشند و داشته باشیم:

$$\varphi_{xx}+\varphi_{yy}=0$$

تذکر: با توجه به مطالب ریاضی عمومی اگر تابع دو متغیره $u(x,y)$ و مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم u پیوسته باشند در اینصورت $u_{xy}=u_{yx}$ می‌شود (یعنی ترتیب مشتق گیری تاثیر ندارد) بنابراین اگر تابع $f(z)=u+vi$ تام باشد در اینصورت u, v هر دو همسازند.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=u_x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=u_{yx}$$

Subject.

Date.

لذا (v و u) را مزدوج همساز نامیم.
زوج

مثال: نشان دهید تابع $u(x,y) = x^2 - y^2 - 2y$ همساز است و

مزدوج همساز u را بدست آورید. **حل**

ادامه: بنابراین اگر u و v مزدوج همساز باشند آنگاه تابع $f(z) = u + vi$

تحلیلی است یعنی در تمام نقاط صفحه مشتق پذیر است یعنی تام است.

$$\left.\begin{array}{l} u_x = 2x \rightarrow u_{xx} = 2 \\ u_y = -2y - 2 \rightarrow u_{yy} \end{array}\right\} \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0 \checkmark \Rightarrow \text{همساز } u$$

حال باید تابع $v(x,y)$ مزدوج همساز u را بدست آوریم یعنی

$f(z) = u + vi$ تحلیلی است.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x \xrightarrow[\text{انتگرال}]{\text{نسبت به } y} v(x,y) = \int 2x\,dy = 2x\int dy + \dots \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y + 2 \quad (1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow v(x,y) = 2xy + g(x)$$

بر حسب x

بنابراین با مشتق‌گیری از $v(x,y)$ نسبت به x و رابطه ① داریم

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + g'(x) \overset{①}{=} 2y+2$$

$$\Rightarrow g'(x) = 2 \Rightarrow g(x) = \int 2\,dx = 2x$$

پس از طرفی g و v به دست آمد

$$v(x,y) = 2xy + 2x$$

مثال: نشان دهید $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ همساز است مزدوج همساز آن بیابید.

$$z = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$ ← سیستم اویلر

تذکر: $\Rightarrow z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$

توابع مختلط

$$f(z) = \ln(z) = \ln(re^{i\theta}) = \ln r + \ln e^{i\theta} = \ln r + i\theta \underbrace{\ln e}_{1}$$

$$\Rightarrow \ln z = \ln r + i\theta$$

PAPCO

Scanned by CamScanner